

PROGRAMOVÝ BALÍK THRESLAB PRO MATLAB

Pavel Rajmic

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

Abstrakt. Jednou ze základních technik ve zpracování signálů pomocí waveletové transformace je tzv. prahování waveletových koeficientů, které se používá pro potlačení aditivního šumu v signálu. Programový balík ThreshLab prezentovaný v tomto příspěvku implementuje jak několik významných typů prahování, tak jejich analýzu pomocí matematické statistiky, tzv. analýzou rizika (Exact Risk Analysis).

1 Úvod

Dnes již standardním využitím waveletové transformace je separace deterministického signálu z jeho směsi s aditivním šumem. Pro tento účel se používá techniky tzv. prahování waveletových koeficientů. Obvykle se používají tvrdé a měkké prahování, která mají obě své výhody a nevýhody. Kromě těchto dvou typů však existují ještě další, které tvoří v určitém smyslu kompromis mezi základními dvěma typy.

Na prahovací pravidla lze za určitých předpokladů nahlížet z pohledu matematické statistiky [1, 4, 5] a její pomocí srovnávat vlastnosti pravidel [8, 6]. Jeden ze statistických přístupů je analýza rizikové funkce (Exact Risk Analysis).

V článku je prezentován stručně princip waveletového potlačování šumu v signálu pomocí prahování a dále způsob srovnání vlastností jednotlivých prahovacích pravidel pomocí matematické statistiky.

Programový balík ThreshLab, jehož význam a hlavní funkce jsou popsány v poslední části článku, je soubor m-funkcí pro MATLAB, který navazuje na Wavelet Toolbox a zahrnuje zejména: implementaci pěti druhů prahování waveletových koeficientů, numerickou a grafickou statistickou analýzu těchto pravidel a vytvoření dalších podpůrných grafů.

2 Princip waveletového potlačování šumu

Nežádoucí šum v signálu má obvykle aditivní charakter a proto je vhodné uvažovat model

$$\mathbf{X} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde \mathbf{X} je náhodný vektor (konečný diskretní náhodný signál), \mathbf{f} je deterministický (čistý) signál a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je náhodný vektor s n -rozměrným normálním rozložením, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$. Waveletovou transformací vyjádřenou pomocí matice \mathbf{W} přejde vztah (1) s využitím linearit v

$$\mathbf{Y} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\nu}, \quad (2)$$

kde $\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{X}$, $\mathbf{b} = \mathbf{W}\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}$. Díky ortogonalitě transformace platí $\boldsymbol{\nu} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, tedy rozložení pravděpodobnosti šumu zůstalo stejné. Označme pozorování náhodných vektorů \mathbf{X} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{Y} , $\boldsymbol{\nu}$, pořadě symboly \mathbf{x} , \mathbf{e} , \mathbf{y} , \mathbf{v} . Vektory \mathbf{y} , \mathbf{b} , \mathbf{v} tedy představují waveletové koeficienty příslušné vektorům \mathbf{x} , \mathbf{f} , \mathbf{e} .

Cílem waveletového potlačování šumu je nalézt vhodný modifikační předpis $\delta(\cdot)$ tak, aby odhad $\hat{b}_i = \delta(y_i) \approx b_i$ byl v nějakém smyslu dobrým odhadem b_i . Koeficienty b_i totiž jsou waveletové koeficienty příslušící signálu *nezatíženého šumem*. Po úpravě waveletových koeficientů navrátíme pomocí matice $\mathbf{W}^\top = \mathbf{W}^{-1}$ signál do výchozí domény. Tím získáme signál s potlačenou šumovou složkou. Tuto v principu jednoduchou metodologii nazvali její autoři *WaveShrink* [2].

Popsaný přístup je analogií klasické fourierovské filtrace, kde podobně upravujeme Fourierovy koeficienty signálu. Avšak u waveletové analýzy je příspěvek každého koeficientu pouze lokální (neboť wavelet je tlumený směrem k $\pm\infty$), takže waveletová reprezentace dovoluje tímto způsobem konstruovat *lokálně adaptivní filtry*, což je vynikající rys ve srovnání s fourierovskými filtry, kde efekt každého koeficientu je obecně globální [7].

Existuje několik technik, jak konstruovat odhady $\hat{b}_i = \delta(y_i)$. Mezi nejpoužívanější metody patří *prahovací techniky* [8]. Jejich princip je následující: hodnoty y_i , které jsou v absolutní hodnotě menší než zvolený práh $\lambda > 0$, jsou vynulovány a ostatní jsou ještě dále upraveny. Je zřejmé, že prahování je nelineární operací na datech. Podle způsobu úprav koeficientů y_i rozlišujeme těchto pět druhů prahování:

1. **Tvrdé prahování**, obrázek 1(a):

$\hat{b}_i = \delta^h(y_i, \lambda)$, kde

$$\delta^h(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \leq \lambda \\ x & \text{pro } |x| > \lambda. \end{cases}$$

2. **Měkké prahování**, obrázek 1(b):

$\hat{b}_i = \delta^s(y_i, \lambda)$, kde

$$\delta^s(x, \lambda) = \text{sgn}(x) \max\{0, |x| - \lambda\}.$$

3. **Poloměkké prahování**, obrázek 1(c):

Toto pravidlo závisí na dvou parametrech $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; $\hat{b}_i = \delta^{ss}(y_i, \lambda_1, \lambda_2)$, kde

$$\delta^{ss}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \leq \lambda_1 \\ \text{sgn}(x) \frac{\lambda_2(|x| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{pro } \lambda_1 < |x| \leq \lambda_2. \\ x & \text{pro } |x| > \lambda_2. \end{cases}$$

4. **Nezáporná garota**, obrázek 1(d):

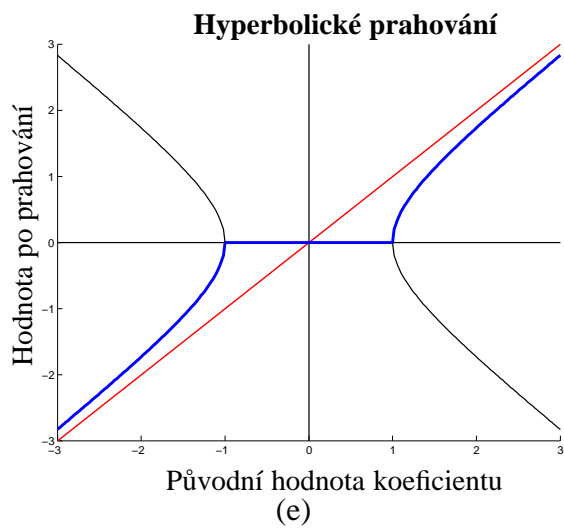
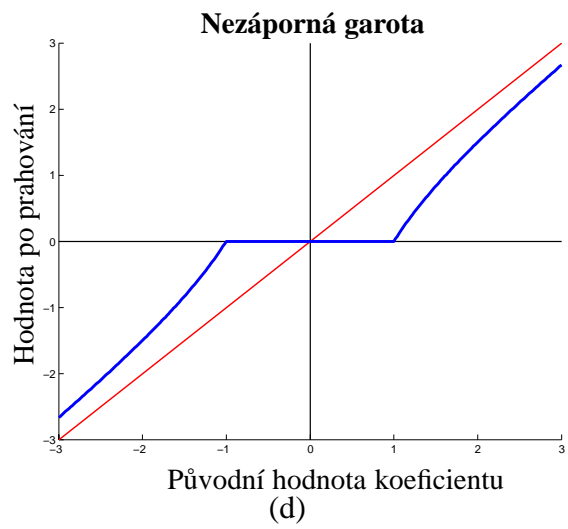
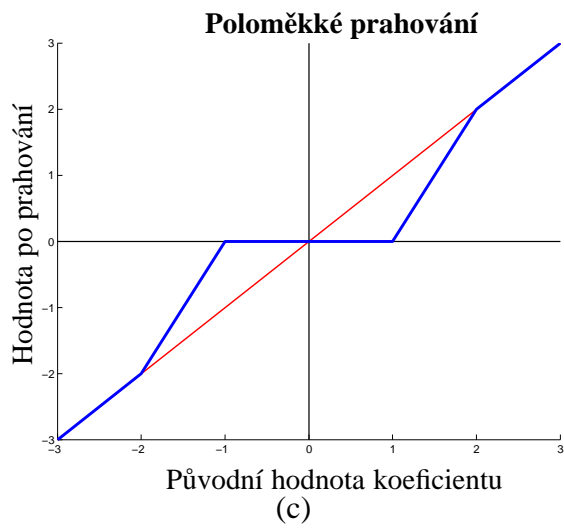
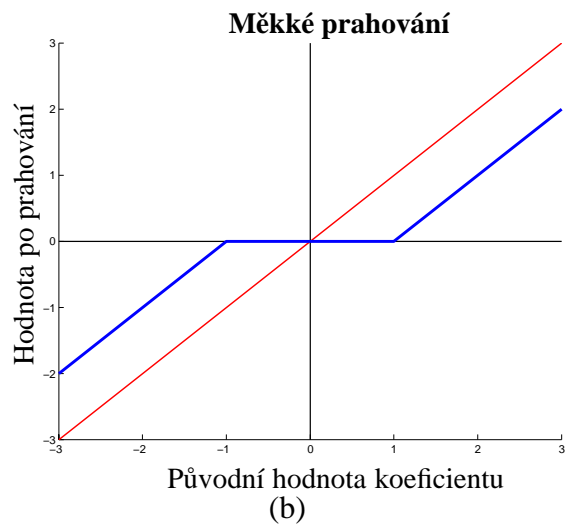
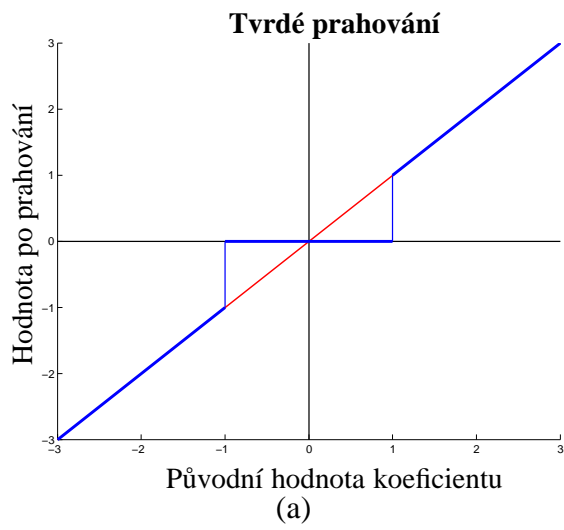
$\hat{b}_i = \delta^{\text{ng}}(y_i, \lambda)$, kde

$$\delta^{\text{ng}}(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \leq \lambda \\ x - \frac{\lambda^2}{x} & \text{pro } |x| > \lambda. \end{cases}$$

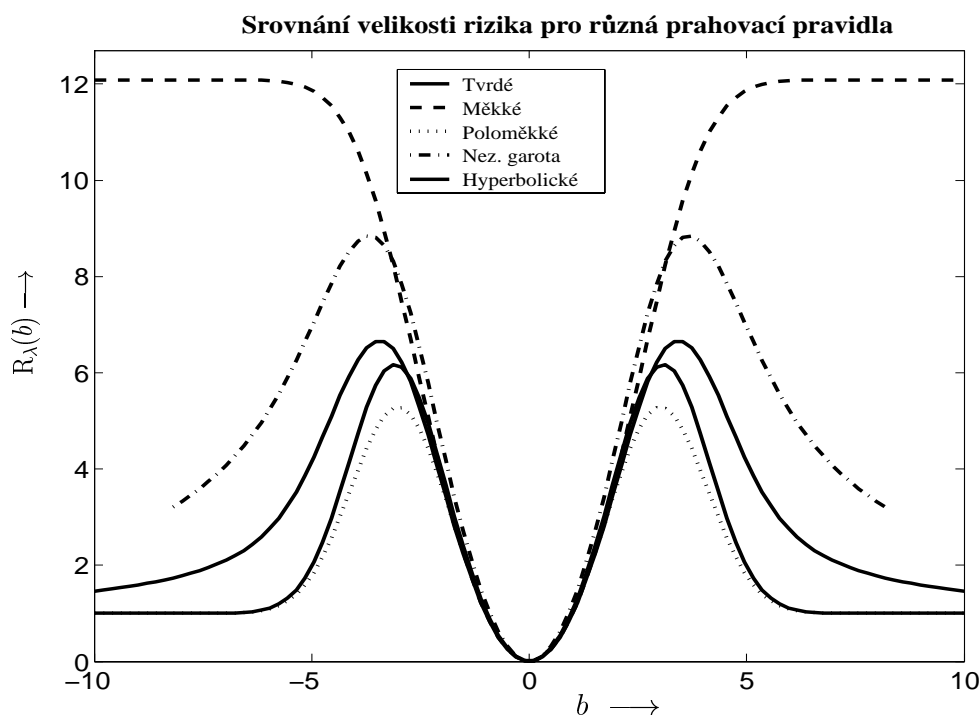
5. **Hyperbolické prahování**, obrázek 1(e):

$\hat{b}_i = \delta^{\text{hy}}(y_i, \lambda)$, kde

$$\delta^{\text{hy}}(x, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| < \lambda \\ \text{sgn}(x) \sqrt{x^2 - \lambda^2} & \text{pro } |x| \geq \lambda. \end{cases}$$



Obr. 1: Grafy prahovacích pravidel. Pro všechna prahovací pravidla zvoleno $\lambda = 1$, kromě poloměkkého prahování, kde $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$.



Obr. 2: Srovnání rizika pěti prahovacích pravidel. Zde $\lambda = 3,33$, $\lambda_1 = 2,86$, $\lambda_2 = 3,72$. Je zřetelné, že stejnoměrně nejmenšího rizika dosahuje poloměkké prahování, avšak jen v případě optimální volby λ_1, λ_2 . Graf byl vytvořen za pomoci balíku ThreshLab.

3 Statistická analýza prahovacích pravidel

Vlastnosti odhadů posuzujeme pomocí statistické techniky Exact Risk Analysis – analýza rizika [8]. Vycházíme z modelu (2) a uvažujeme *jedinou* náhodnou veličinu Y_i , kterou pro jednoduchost budeme dále značit pouze Y . Bez újmy na obecnosti můžeme nadále předpokládat jednotkový rozptyl šumu, tedy $Y \sim N(b_i, 1)$ [6]. Místo $\delta(Y, \lambda)$ budeme dále pro jednoduchost psát pouze $\delta(Y)$.

Prahoací pravidla $\delta^h, \delta^s, \delta^{ss}, \delta^{nng}, \delta^{hy}$ posuzujeme z hlediska:

1. **střední hodnoty** $M_\lambda(b) = E[\delta(Y)]$,
2. **rozptylu** $V_\lambda(b) = \text{var}[\delta(Y)]$,
3. **rizika** $R_\lambda(b) = E[\delta(Y) - b]^2$.

pro pevně zvolenou hodnotu prahu $\lambda > 0$. Nejdůležitější informací přitom obsahuje hodnota rizika, neboť udává odchylku od „správné“ hodnoty b , nikoliv od její střední hodnoty $M_\lambda(b)$.

Označme příslušnost výše uvedených statistik k prahovacím pravidlům horním indexem, tj. např. rozptyl měkkého prahování bude označen $V_\lambda^s(b)$.

V pracích [6, 4, 1, 5] jsou odvozeny vzorce pro všechna prahovací pravidla. Na základě analýzy těchto vzorců může být provedeno vzájemné srovnání statistických vlastností všech pravidel a vyvozeny důležité důsledky. Ukazuje se, že z hlediska analýzy rizika tvrdé a měkké prahování tvoří protilehlé póly a ostatní pravidla jsou v určitém smyslu kompromisem mezi nimi.

Implementaci všech pravidel a také nástrojů na jejich analýzu zahrnuje balík ThreshLab pro Matlab, viz níže.

Na obrázku 2 je pro příklad vyobrazeno srovnání rizika všech pěti zmíněných pravidel.

4 Balík ThreshLab

ThreshLab je soubor programů (m-funkcí) pro prostředí MATLAB¹, který navazuje na Wavelet Toolbox² firmy MathWorks. Tento balík zahrnuje zejména:

- implementaci všech pěti druhů prahování waveletových koeficientů,
- numerickou i grafickou statistickou analýzu každého z prahovacích pravidel, a to pro obecný rozptyl šumu $\sigma \neq 1$,
- vytvoření potřebných typů grafů, což zahrnuje např. přehledné zobrazení prahovaných koeficientů, zhodnocení výsledků prahování, mnohoměřítkovou analýzu (MRA), těsnost přiléhavosti waveletové báze k analyzovanému signálu,
- to vše dostupné pomocí několika hlavních funkcí s volitelnými parametry.

M-funkce obsažené v tomto balíku jsou k nalezení na adrese <http://www.utko.feec.vutbr.cz/~rajmic>. Návoděda k funkcím a popisky v jimi produkovaných grafech jsou v anglickém jazyce.

Nejdůležitější funkce ThreshLabu jsou:

`thresh.m`..... ústřední procedura balíčku. Na základě řady parametrů provede prahování waveletového spektra vstupního signálu a přehledně zobrazí výsledný signál a statistiku prahování jednotlivých úrovní waveletových koeficientů. Praktická ukázka viz obr. 3. Implementováno je pět druhů prahovacích pravidel zmíněných v tomto příspěvku.

`plot_wav.m`..... funkce umožňující vykreslení různých typů grafů obsahujících waveletové koeficienty, příspěvky jednotlivých úrovní v MRA apod.

`era*_+.m`..... patnáct funkcí pro statistickou analýzu prahovacích pravidel. Symbol `*` zastupuje označení typu prahování, symbol `+` zastupuje název statistiky. Např. funkce `era_hy_var.m` vypočítá rozptyl hyperbolického prahování.

`denoise_tree.m`...odšumování signálu reprezentovaného binárním stromem (zobecnění na waveletové pakety [6]).

`wp_denoise.m`..... provede odšumování signálu reprezentovaného binárním stromem pomocí nejlepší báze waveletového paketu a tzv. „prahovou“ entropií.

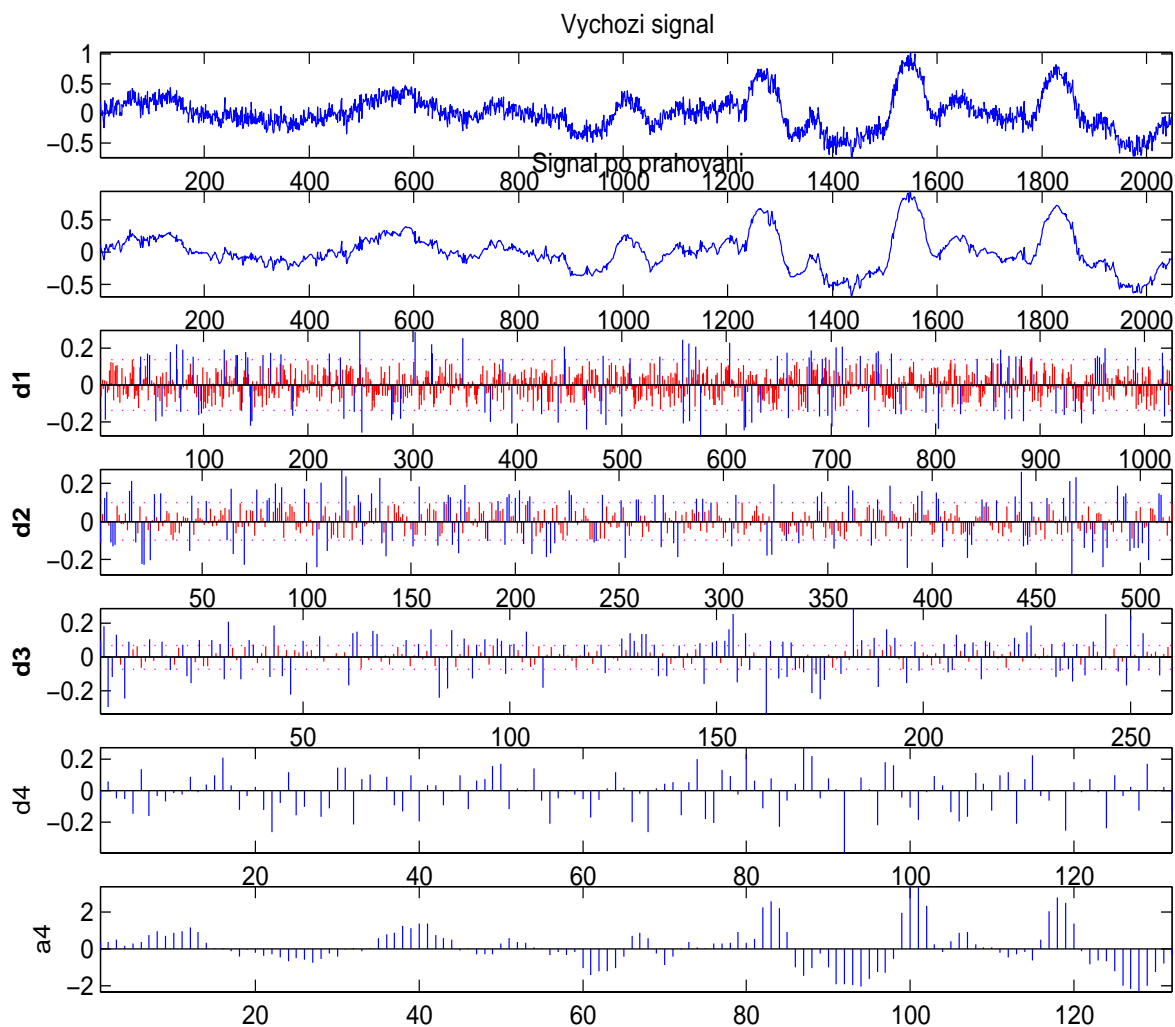
Funkce `era*_+.m` využívají soubory `distchck.m`, `normpdf.m` a `normcdf.m` ze Statistics Toolbox for Matlab. Tyto soubory jsou nakopírovány do adresáře balíku Threshlab, aby bylo možné tento balík využívat i bez zmíněného toolboxu.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za přispění Grantové agentury České republiky, projekt reg. č. 102/04/1097.

¹verze 6 a vyšší

²verze 2.2



Obr. 3: Ukázka grafického výstupu funkce `thresh.m`. Shora první graf ukazuje vstupní zašumělý signál. Druhý graf je signál po prahování. Následují grafy s waveletovými koeficienty jednotlivých detailních úrovní a aproximační koeficienty. Tučným písmem jsou zvýrazněny prahované detailní úrovně. Na jim příslušných subgrafech jsou rozlišeny podprahové waveletové koeficienty, jež byly vynulovány (červenou barvou) a ty, jež byly dále upravovány (standardní modrou barvou). Rovněž jsou horizontálními čarami naznačeny příslušné prahové hodnoty.

Literatura

- [1] BRUCE, A. G., GAO, H.-Y.: Understanding WaveShrink: Variance and Bias Estimation. *Research Report 36*, StatSci Division of MathSoft, Inc., 1996.
- [2] DONOHO, D.L., JOHNSTONE, I.M.: Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, **81**(3), pp. 425–455, 1994.
- [3] JOHNSTONE, I.M., SILVERMAN, B.W.: *Wavelet threshold estimators for data with correlated noise*. Research report, Stanford University and Bristol University, 1994.
- [4] GAO, H-Y.: Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *J. Comput. Graph. Statist.*, 7 (4), pp. 469–488, 1998.
- [5] GAO, H-Y., BRUCE, A.G.: WaveShrink with firm shrinkage. *Research Report 39*, StatSci Division of MathSoft, Inc., 1996.
- [6] RAJMIC, P.: Využití waveletové transformace a matematické statistiky pro separaci signálu a šumu. Dizertační práce. FEKT VUT v Brně, 2004.
- [7] VESELÝ, V.: Wavelety a jejich použití při filtraci dat. *Proceedings of the Summer School ROBUST'96* (J. Antoch and G. Dohnal, eds.), pp. 241–272, JČMF, 1997.
- [8] VIDA KOVIC, B.: *Statistical Modeling by Wavelets (Wiley Series in Probability and Statistics)*. John Wiley & Sons, New York, 1999.

Mgr. Pavel Rajmic
Ústav telekomunikací
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Vysoké učení technické v Brně
Purkyňova 118, 612 00 Brno
rajmic@feec.vutbr.cz, tel. 541 149 166