Jak nejrychleji připravit vodu na čaj?

Chceme si ve varné konvici připravit vodu na čaj, přičemž vodu z kohoutku chceme před uvařením překapat přes filtr. Celkový objem vody přitom můžeme rozdělit na dvě části, přičemž první část necháme nejprve překapat a jakmile ji dáme uvařit, začneme překapávat druhou část vody, kterou po překapání přilejeme k první části a necháme dojít do varu.

Otázka zní: *Jaký je poměrný objem první části vody, aby byl čas na přípravu nejkratší?*

Neuvažujeme vypařování vody, zvětšování jejího objemu, chladnutí vody ve varné konvici, čas spotřebovaný manipulací... Konvice se vypíná při teplotě 100 stupňů.
Označme:
V [l] ... celkový objem vody
f [l/min] ... rychlost překapávání filtru
k [min/l] ... rychlost ohřátí vody o 1 stupeň
c [stupně] ... počáteční teplota vody

Řešení: Označme první část vody jako x, $x \in [0, V]$, druhá tedy bude $V - x$. Intuitivně je možné určit řešení takto: zvolit x tak, aby ve chvíli, kdy překape druhá část vody $V - x$ se právě dostala do varu první část vody. Ukažme ale analytické řešení, které nás dovede ke stejnému závěru.

Rozdělíme celkový čas $t_\Sigma(x)$ na tři části:

- $t_1(x)$ bude čas, za jak dlouho překape objem x
- $t_2(x)$ bude čas, za jak dlouho (ihned návazně na t_1) překape objem $V - x$
- $t_3(x)$ bude čas, za jak dlouho (ihned návazně na t_2) se dovede do varu $V - x$, a v případě, že během t_2 se nestihlo dostat x až na 100 stupňů, se k tomu přidá čas nutný pro dohřátí x.

Během t_2 se objem x stihne ohřát na teplotu c_m, kterou je možno určit jako řešení rovnice

$$x(c_\mathrm{m} - c)k = \frac{V - x}{f} \tag{1}$$

$$c_\mathrm{m} = \frac{V - x}{kfx} + c, \tag{2}$$

ale zároveň tato teplota nemůže být vyšší než 100 stupňů, a proto c_m napíšeme jako

$$c_\mathrm{m} = \min\left\{100, \frac{V - x}{kfx} + c\right\}. \tag{3}$$

Dá se jednoduše ukázat, že bude $c_{\mathrm{m}} < 100$ (tedy první várka vody nestihne vyvřít), pokud

$$x > \frac{V}{(100-c)kf+1}. \tag{4}$$

Po této úvaze se vraťme k definici tří časů – bude pro ně platit toto:

$$t_1 = \frac{x}{f} \tag{5}$$

$$t_2 = \frac{V-x}{f} \tag{6}$$

$$t_3 = (V-x)(100-c)k + x(100-c_{\mathrm{m}})k. \tag{7}$$

Chceme tedy minimalizovat $t_\Sigma = t_1 + t_2 + t_3$ pro nezávislou proměnnou x. Napišme a upravme tento součet:

$$t_\Sigma = \frac{x}{f} + \frac{V-x}{f} + (V-x)(100-c)k + x(100-c_{\mathrm{m}})k \tag{8}$$

$$= \frac{V}{f} + kV(100-c) + kx[(100-c_{\mathrm{m}}) - (100-c)] \tag{9}$$

$$= \frac{V}{f} + kV(100-c) + kcx - kx \min\left\{100, \frac{V-x}{kfx} + c\right\}. \tag{10}$$

Při nesplnění (4) bude poslední výraz roven

$$t_\Sigma = \frac{V}{f} + kV(100-c) + kcx - 100kx \tag{11}$$

$$= V\left[\frac{1}{f} + k(100-c)\right] - xk(100-c), \tag{12}$$

což je klesající přímka, protože c nemůže přesáhnout 100 stupňů a k je kladné. Naopak při splnění (4) vychází celkový čas jako

$$t_\Sigma = \frac{V}{f} + kV(100-c) + kcx - kx\left(\frac{V-x}{kfx} + c\right) \tag{13}$$

$$= \frac{V}{f} + kV(100-c) + kcx - \frac{V}{f} + \frac{x}{f} \tag{14}$$

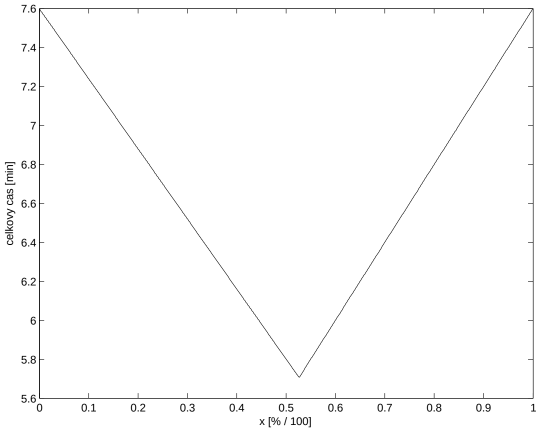
$$= V(100-c)k + \frac{x}{f}, \tag{15}$$

což je vzhledem k nezápornosti f přímka rostoucí.

Zamysleme si nyní, kde leží minimum. Dosadíme-li $x = 0$ nebo $x = V$, dosáhneme v obou případech (logicky) shodného času přípravy

$$t_\Sigma(0) = t_\Sigma(V) = V\left[\frac{1}{f} + k(100-c)\right].$$

A protože pro rostoucí x, jak jsme před chvílí ukázali, nejprve čas lineárně klesá a pak lineárně roste zpět do stejné hodnoty, minimum musí být jediné a nachází



Obrázek 1: Průběh celkového času $t_\Sigma(x)$ přípravy 1 litru vody v závislosti na poměrném objemu x, při konkrétních hodnotách parametrů k, f, c z praxe (viz text). Při zvětšujících se rychlostech filtrace a ohřívání f, k by se minimum posunovalo vlevo, při rostoucí počáteční teplotě c naopak vpravo.

se právě ve „zlomu“ těchto úseček. Tento bod je ovšem takové x, pro které právě nastane rovnost v (4). Tedy máme

$$x_{\text{opt}} = \frac{V}{(100 - c)kf + 1} \tag{16}$$

a hledaný optimální poměrný objem první části (vzhledem k V) je tedy

$$\frac{1}{(100 - c)kf + 1} \ : \ 1. \tag{17}$$

Optimální dobu přípravy lze dopočítat dosazením x_{opt} a je to

$$t_\Sigma(x_{\text{opt}}) = V \left[(100 - c)k + \frac{1}{(100 - c)kf^2 + f} \right]. \tag{18}$$

Pro praktickou představu, konkrétní filtrační konvice má $f = 1/4$ (překape 1 litr za 4 minuty), varná konvice má $k = 0{,}424$ (přivede do varu půllitr vody z 15 stupňů za 1:50). Při takovýchto parametrech vychází optimální objem

$$x_{\text{opt}} = \frac{1}{(100 - c)kf + 1} = 0{,}526, \tag{19}$$

tedy o něco málo více než polovinu objemu nechat překapat v první várce. Nejkratší možná doba přípravy jednoho litru tak bude 5,7 minuty, zatímco bez rozdělování by příprava trvala 7,6 minut!

Tato úloha by mohla mít i obecnější znění, např. vodu by bylo možné rozdělit ne na dva, ale N dílů, nebo by cílem nebylo dostat vodu do varu, ale pouze na nižší cílovou teplotu.