

Podávání rukou na párty

Manželé Smithovi pozvali do svého domu čtyři jiné páry. Některé pozvané osoby byly přáteli pana Smitha a některé pozvané osoby byly přáteli paní Smithové. Když hosté přijeli, lidé, kteří se již vzájemně znali, si podali ruku; ti, kteří se dosud neznali, se pozdravili pouze slovně. Poté co se toto událo, pan Smith prohlásil: „Jak zajímavé! Když nepočítám sebe, počet stisků ruky u každého člověka se liší.“

S kolika lidmi si podala ruku paní Smithová?

Přebráno z knihy: Bóna, M.: A Walk Through Combinatorics: An Introduction. World Scientific Publishing Company. Second edition, 2006. ISBN 9812568867.

Otázka navíc: Lze tu otázku odpovědět i pro párty s obecným počtem pozvaných párů?

Řešení: Na párty bylo tedy 5 párů, 10 lidí, přičemž manželé se navzájem zřejmě nezdravili. Libovolná osoba si mohla ruku podat maximálně s osmi lidmi (vyrážujeme sama sebe a partnera). Pokud tedy má platit to, co řekl pan S., pak jedna osoba z devíti si musela stisknout ruku s osmi lidmi, další se sedmi, další se šesti, atd., až poslední osoba nepodala ruku nikomu.

Označíme si osoby písmenem Y a přiřadíme index počtu stisknutí ruky. Tedy máme osoby Y_0, \dots, Y_8 a pana Smitha.

Podívejme se na osobu Y_8 : ta si podala ruku 8krát, to znamená se všemi kromě svého partnera. Ovšem tento partner nemůže být nikdo jiný než Y_0 , protože ten si nepodal ruku vůbec s nikým. Tedy Y_8 a Y_0 jsou manželský pár. Podobně Y_7 si podal ruce se všemi mimo Y_0 a svého partnera. Víme, že Y_1 si musel podal ruku s Y_8 , a proto dalším párem jsou Y_7 a Y_1 . Analogicky určíme páry Y_6 – Y_2 a Y_5 – Y_3 , což znamená, že Y_4 zbývá na pana Smitha a je to jeho manželka.

Tedy odpověď zní: *Paní Smithová stiskla ruku čtyřem lidem. (Dokonce víme kterým: Y_8, Y_7, Y_6, Y_5 .)*

Z postupu řešení je jasné, že na otázku bude možné odpovědět při libovolném počtu pozvaných párů: Paní Smithová stiskne ruku $(k - 1)$ lidem, když k bude značit počet párů.